Karta wzorów

Podręcznik Ideis, 1 rok informatyki stosowanej. Karta od 6 października 2026, ostatnia aktualizacja 24 października 2026, 11:20. Najnowsza wersja: plan-ideis.vercel.app/wzory

Spis treści

1. Matematyka ze szkoły średniej 2

Oznaczenia
1.1 Potęgi i pierwiastki
1.2 Wzory skróconego mnożenia
1.3 Logarytmy
1.4 Wartość bezwzględna
1.5 Funkcja liniowa i prosta
1.6 Funkcja kwadratowa
1.7 Wielomiany
1.8 Ciągi
1.9 Trygonometria
1.10 Geometria na płaszczyźnie
1.11 Geometria analityczna
1.12 Bryły
1.13 Kombinatoryka i prawdopodobieństwo
1.14 Granice i pochodne

2. Algebra liniowa 8

Oznaczenia
2.1 Liczby zespolone
2.2 Działania na macierzach
2.3 Wyznaczniki
2.4 Macierz odwrotna
2.5 Układy równań liniowych
2.6 Wektory i iloczyny
2.7 Proste i płaszczyzny w przestrzeni
2.8 Przestrzenie liniowe
2.9 Wartości i wektory własne
2.10 Przekształcenia liniowe

3. Statystyka opisowa 13

Oznaczenia
3.1 Średnia, mediana, dominanta, kwartyle
3.2 Wariancja, odchylenia, zmienność
3.3 Asymetria
3.4 Korelacja i regresja
3.5 Dynamika zjawisk
3.6 Trend i wygładzanie

4. Skróty Word i Excel 17

4.1 Word: diagnoza i podgląd
4.2 Word: znaki specjalne
4.3 Word: akapit
4.4 Word: formatowanie znaku
4.5 Word: style i czyszczenie
4.6 Word: odwołania, pola, kontrola
4.7 Word: kody w Znajdź i zamień
4.8 Excel: ruch i zaznaczanie
4.9 Excel: wpisywanie i formuły
4.10 Excel: format, tabele, wykresy, makra

1 Matematyka ze szkoły średniej

Zakres matury z matematyki (podstawa i rozszerzenie), wybrane rzeczy, które wracają na algebrze i statystyce.

Oznaczenia

Zbiory i przedziały

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	liczby naturalne, liczby całkowite
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$	liczby wymierne (ułamki), liczby rzeczywiste
$\langle a, b\rangle$	przedział domknięty: końce należą
(a, b)	przedział otwarty: końce nie należą
$\langle a, b),\ (a, b\rangle$	przedział domknięty z jednej strony
$(-\infty, a\rangle$	wszystkie liczby $\leq a$; przy ∞ zawsze nawias okrągły
$x \in A,\ x \notin A$	x należy do zbioru A, nie należy
$A \subset B$	A zawiera się w B
$A \cup B,\ A \cap B$	suma zbiorów (w którymkolwiek), część wspólna (w obu)
$A \setminus B,\ \varnothing$	różnica (w A, ale nie w B), zbiór pusty

Logika i relacje

$\wedge,\ \vee$	i, lub
$\Rightarrow$	wynika (jeśli ..., to ...)
$\iff$	wtedy i tylko wtedy (równoważne)
$\neq,\ \approx$	różne, w przybliżeniu równe
$\leq,\ \geq$	mniejsze lub równe, większe lub równe
$\pm,\ \mp$	plus albo minus; $\mp$ to znak przeciwny do $\pm$ w tym samym wzorze
$a \mid b$	a dzieli b bez reszty

Liczby, funkcje, ciągi

$\lvert x\rvert$	wartość bezwzględna (moduł): odległość x od zera
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek n-tego stopnia; $\sqrt{a}$ to kwadratowy
$\log_a b$	logarytm: do jakiej potęgi podnieść a, żeby dostać b
$\log x,\ \ln x$	logarytm o podstawie 10, o podstawie e
$e,\ \pi$	stałe: $e \approx 2{,}718, \pi \approx 3{,}14$
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
Δ	wyróżnik trójmianu kwadratowego (delta)
$a_n,\ S_n$	n-ty wyraz ciągu, suma n początkowych wyrazów
$r,\ q$	różnica ciągu arytmetycznego, iloraz ciągu geometrycznego
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$\lim_{x \to a} f(x)$	granica: do czego dąży $f(x)$, gdy x dąży do a
$f'(x)$	pochodna funkcji f: tempo zmian, nachylenie stycznej

Geometria i trygonometria

$\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$	sinus, cosinus, tangens, cotangens (po angielsku tan, cot)
$\alpha, \beta, \gamma, \varphi$	kąty
$30^\circ,\ \text{rad}$	stopnie, radiany ($\pi\ \text{rad} = 180^\circ$)
$\lvert AB\rvert$	długość odcinka AB
$\overrightarrow{AB}$	wektor od punktu A do B
$\parallel,\ \perp$	równoległe, prostopadłe
$P,\ L,\ V$	pole, obwód (długość okręgu), objętość
$h,\ H$	wysokość figury, wysokość bryły
$r,\ R$	promień; w trójkącie okręgu wpisanego i opisanego
$P_p,\ P_b$	pole podstawy, pole powierzchni bocznej

Kombinatoryka i prawdopodobieństwo

$n!$	silnia: $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$
$\binom{n}{k}$	symbol Newtona, czytasz „n nad k"
Ω	zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych
$\lvert A\rvert$	przy zbiorze: liczba jego elementów
$P(A),\ A'$	prawdopodobieństwo zdarzenia A, zdarzenie przeciwne
$P(A \mid B)$	prawdopodobieństwo A, gdy wiadomo, że zaszło B
$E(X)$	wartość oczekiwana zmiennej losowej X

1.1 Potęgi i pierwiastki

Mnożenie i dzielenie potęg

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

dla wykładników całkowitych $a \neq 0$, dla dowolnych rzeczywistych $a > 0$

Potęga potęgi, iloczynu i ilorazu

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

potęgę potęgi liczysz, mnożąc wykładniki; potęga iloczynu i ilorazu rozkłada się na czynniki (w ilorazie $b \neq 0$)

Wykładnik zero i ujemny

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

dla $a \neq 0$

Wykładnik wymierny

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

dla $a \geq 0$, m i n naturalnych, $n \geq 2$; wykładnik ujemny tylko dla $a > 0$

Pierwiastki

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

dwa pierwsze dla $a, b \geq 0$ (w ilorazie $b > 0$), ostatni dla każdego a

Niewymierność w mianowniku

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \qquad \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

dla $a, b > 0$, w drugim $a \neq b$

1.2 Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy i różnicy

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

znak środkowego wyrazu taki jak w nawiasie, kwadraty zawsze z plusem, np. $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

Różnica kwadratów

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

najczęstszy rozkład na czynniki, np. $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Suma kwadratów $a^2 + b^2$ tak się nie rozkłada

Sześcian sumy i różnicy

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

współczynniki 1, 3, 3, 1; przy różnicy znaki idą na przemian: plus, minus, plus, minus

Suma i różnica sześcianów

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

w pierwszym nawiasie ten sam znak co po lewej, w drugim przy ab przeciwny, np. $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

Kwadrat sumy trzech składników

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

kwadraty wszystkich składników plus podwojone iloczyny każdej pary

1.3 Logarytmy

Definicja

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

$a > 0, a \neq 1, b > 0$. Skróty: $\log x = \log_{10} x$, $\ln x = \log_e x$, $e \approx 2{,}718$

Iloczyn, iloraz i potęga

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

logarytm zamienia mnożenie na dodawanie, dzielenie na odejmowanie, a wykładnik wychodzi przed logarytm; dla $x, y > 0$

Zmiana podstawy

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$c > 0, c \neq 1$; drugi wzór dla $b \neq 1$

Wartości do zapamiętania

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad a^{\log_a b} = b$$

dla $a > 0, a \neq 1$, ostatni dla $b > 0$: potęga i logarytm o tej samej podstawie się znoszą

1.4 Wartość bezwzględna

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$|x - a|$ to odległość x od a na osi liczbowej

Nierówności z wartością bezwzględną

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

$$|x| > a \iff x < -a \ \vee \ x > a$$

dla $a > 0$

Własności

$$|ab| = |a|\,|b| \qquad |a+b| \leq |a| + |b| \qquad |a-b| = |b-a|$$

środkowa to nierówność trójkąta: moduł sumy nigdy nie jest większy niż suma modułów

1.5 Funkcja liniowa i prosta

Wzór funkcji liniowej

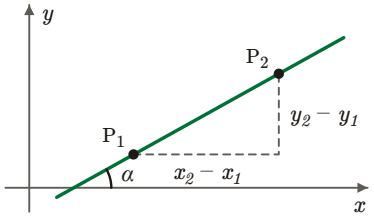
$$f(x) = ax + b$$

a współczynnik kierunkowy, b wyraz wolny (przecięcie z osią OY). Dla $a > 0$ rośnie, dla $a < 0$ maleje

Współczynnik kierunkowy z dwóch punktów

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

dla $x_1 \neq x_2$; α to kąt nachylenia prostej do osi OX



a to przyrost w pionie przez przyrost w poziomie

Prosta przez dwa punkty

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

prosta przez (x_1, y_1) i (x_2, y_2); działa też dla prostej pionowej, gdy $x_1 = x_2$

Proste równoległe i prostopadłe

$$a_1 = a_2 \qquad a_1 \cdot a_2 = -1$$

dla prostych $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$: pierwszy warunek to równoległe, drugi prostopadłe

Postać ogólna prostej

$$Ax + By + C = 0$$

A i B nie są jednocześnie zerami

1.6 Funkcja kwadratowa

Postać ogólna

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

a decyduje o ramionach: $a > 0$ w górę, $a < 0$ w dół; $c = f(0)$ to punkt przecięcia z osią OY

Wyróżnik (delta)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

mówi, ile jest miejsc zerowych: $\Delta > 0$ dwa, $\Delta = 0$ jedno, $\Delta < 0$ żadnego

Dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

gdy $\Delta > 0$

Jedno miejsce zerowe

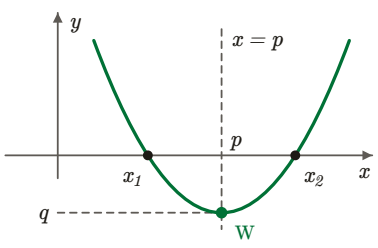
$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

gdy $\Delta = 0$ (pierwiastek podwójny). Gdy $\Delta < 0$, brak miejsc zerowych

Wierzchołek paraboli

$$W = (p, q), \quad p = \frac{-b}{2a}, \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

prosta $x = p$ to oś symetrii paraboli, q to wartość najmniejsza (dla $a > 0$) albo największa (dla $a < 0$)



dla $a > 0$ i $\Delta > 0$: miejsca zerowe leżą symetrycznie wokół p

Postać kanoniczna

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

od razu widać wierzchołek (p, q): to wykres $y = ax^2$ przesunięty o p w poziomie i o q w pionie

Postać iloczynowa

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

dla $\Delta \geq 0$; przy $\Delta = 0$ jest to $a(x-x_0)^2$

Wzory Viète'a

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

dla $\Delta \geq 0$

1.7 Wielomiany

Twierdzenie Bézouta

$$W(a) = 0 \iff (x-a) \mid W(x)$$

a jest pierwiastkiem, gdy wielomian dzieli się przez $(x-a)$

Reszta z dzielenia przez dwumian

$$W(x) = (x-a) \cdot Q(x) + W(a)$$

reszta z dzielenia $W(x)$ przez $(x-a)$ to po prostu $W(a)$; $Q(x)$ to iloraz

Pierwiastki wymierne

$$x = \frac{p}{q}, \quad p \mid a_0, \quad q \mid a_n$$

dla współczynników całkowitych: tylko takie ułamki (nieskracalne) mogą być pierwiastkami. a_0 wyraz wolny, a_n współczynnik przy najwyższej potędze

1.8 Ciągi

Arytmetyczny: wyraz ogólny

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

r to stała różnica: każdy wyraz to poprzedni plus r

Arytmetyczny: suma n wyrazów

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

średnia pierwszego i ostatniego wyrazu razy liczba wyrazów

Arytmetyczny: wyraz środkowy

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

dla $n \geq 2$ każdy wyraz jest średnią sąsiadów; tak sprawdzisz, czy trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny

Geometryczny: wyraz ogólny

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

q to stały iloraz: każdy wyraz to poprzedni razy q

Geometryczny: suma n wyrazów

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

dla $q \neq 1$; dla $q = 1$ jest $S_n = n \cdot a_1$

Geometryczny: wyraz środkowy

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

dla $n \geq 2$ kwadrat wyrazu równa się iloczynowi sąsiadów; test na ciąg geometryczny dla trzech liczb

Szereg geometryczny

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

suma nieskończenie wielu wyrazów, gdy $|q| < 1$

Procent składany

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

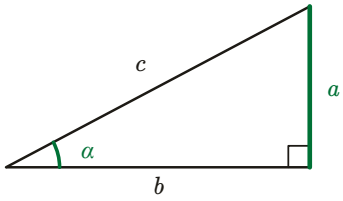
K kapitał początkowy, p procent na okres, n liczba okresów

1.9 Trygonometria

Trójkąt prostokątny

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

a przyprostokątna naprzeciw kąta α, b przyprostokątna przy kącie α, c przeciwprostokątna



a leży naprzeciw kąta α, b przy nim, c naprzeciw kąta prostego

Jedynka trygonometryczna

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

dla każdego kąta; z niej liczysz $\cos\alpha$, znając $\sin\alpha$ (znak zależy od ćwiartki). Tangens tylko dla $\cos\alpha \neq 0$

Wartości dla ważnych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

$\times$: tangens nie istnieje

Miara łukowa

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \qquad 1 \text{ rad} \approx 57{,}3^\circ$$

stopnie na radiany: mnożysz przez $\frac{\pi}{180^\circ}$, np. $60^\circ = \frac{\pi}{3}$

Wzory redukcyjne (najczęstsze)

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

przy $90^\circ - \alpha$ sinus i cosinus zamieniają się miejscami, przy $180^\circ - \alpha$ sinus zostaje, a cosinus zmienia znak; cosinus jest parzysty, sinus nieparzysty

Okresowość

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$$

k całkowite

Kąt podwojony

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

trzy postaci $\cos 2\alpha$: bierzesz tę, w której zostaje funkcja, którą znasz

Sinus i cosinus sumy i różnicy

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

w cosinusie znak w środku jest przeciwny niż w nawiasie ($\mp$)

Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

R promień okręgu opisanego na trójkącie

Twierdzenie cosinusów

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

γ kąt naprzeciw boku c

1.10 Geometria na płaszczyźnie

Twierdzenie Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

c przeciwprostokątna

Pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2}ah \qquad P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

h wysokość opuszczona na bok a; w drugim γ to kąt między bokami a i b

Wzór Herona

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

pole z samych trzech boków; p to połowa obwodu

Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

a bok, h wysokość

Okrąg opisany i wpisany w trójkąt

$$R = \frac{abc}{4P} \qquad r = \frac{2P}{a+b+c}$$

R promień okręgu opisanego, r wpisanego

Równoległobok, trapez, romb

$$P = ah = ab\sin\alpha \qquad P = \frac{(a+b)h}{2} \qquad P = \frac{d_1 d_2}{2}$$

w rombie d_1, d_2 to przekątne

Koło i okrąg

$$P = \pi r^2 \qquad L = 2\pi r$$

P pole koła, L długość okręgu (obwód), r promień

Wycinek koła i łuk

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot \pi r^2 \qquad l = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi r$$

α kąt środkowy w stopniach, l długość łuku: taka część koła, jaką α stanowi z 360°

1.11 Geometria analityczna

Odległość dwóch punktów

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

twierdzenie Pitagorasa na różnicach współrzędnych

Środek odcinka

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

średnie współrzędnych końców odcinka

Współrzędne wektora

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A,\ y_B - y_A]$$

koniec minus początek

Równanie okręgu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

środek $S = (a, b)$, promień r

Odległość punktu od prostej

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

punkt (x_0, y_0), prosta $Ax + By + C = 0$

1.12 Bryły

Graniastosłup

$$V = P_p \cdot H$$

P_p pole podstawy, H wysokość

Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$$

P_p pole podstawy, H wysokość; trzy razy mniej niż graniastosłup o tej samej podstawie i wysokości

Walec

$$V = \pi r^2 H \qquad P_b = 2\pi r H$$

P_b pole powierzchni bocznej

Stożek

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H \qquad P_b = \pi r l$$

l tworząca

Kula

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad P = 4\pi r^2$$

V objętość, P pole powierzchni, r promień

Przekątna prostopadłościanu i sześcianu

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad d = a\sqrt{3}$$

a, b, c krawędzie prostopadłościanu; w sześcianie wszystkie są równe a

1.13 Kombinatoryka i prawdopodobieństwo

Silnia

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1$$

iloczyn liczb od 1 do n, np. $4! = 24$

Permutacje

$$P_n = n!$$

na ile sposobów ustawisz n różnych elementów

Wariacje bez powtórzeń

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ciągi k różnych elementów z n, kolejność ważna

Wariacje z powtórzeniami

$$W_n^k = n^k$$

ciągi k elementów z n, elementy mogą się powtarzać, kolejność ważna (np. 4-cyfrowych PIN-ów jest 10^4)

Kombinacje (symbol Newtona)

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

wybór k elementów z n, kolejność nieważna

Dwumian Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

współczynniki to kolejne liczby z trójkąta Pascala

Prawdopodobieństwo klasyczne

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdy wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne

Zdarzenie przeciwne i suma zdarzeń

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A' to „nie zaszło A"; w sumie odejmujesz część wspólną, bo inaczej liczysz ją dwa razy

Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

dla $P(B) > 0$. Zdarzenia niezależne: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

$B_1, \ldots, B_n$ rozbijają Ω na rozłączne części

Schemat Bernoulliego

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

k sukcesów w n próbach, p prawdopodobieństwo sukcesu

Wartość oczekiwana

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

średnia ważona wartości zmiennej X: x_i wartości, p_i ich prawdopodobieństwa (sumują się do 1)

1.14 Granice i pochodne

Granice do zapamiętania

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$e \approx 2{,}718$; druga granica dla x w radianach

Pochodne podstawowe

$$(c)' = 0 \qquad (x^n)' = n x^{n-1} \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c stała; drugi wzór dla każdego wykładnika rzeczywistego (np. $(x^{-1})' = -x^{-2}$), trzeci dla $x > 0$

Wykładnicza i logarytm

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

dla $a > 0$; pochodna $\ln x$ dla $x > 0$

Funkcje trygonometryczne

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

x w radianach; tangens dla $\cos x \neq 0$

Suma, iloczyn i iloraz

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

pochodna iloczynu to nie iloczyn pochodnych; w ilorazie $g \neq 0$, a kolejność w liczniku ma znaczenie

Funkcja złożona

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

pochodna funkcji zewnętrznej (w punkcie $g(x)$) razy pochodna wewnętrznej, np. $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$

Styczna do wykresu w punkcie

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

styczna w punkcie $(x_0, f(x_0))$; jej współczynnik kierunkowy to $f'(x_0)$

Ekstremum

$$f'(x_0) = 0$$

warunek konieczny; ekstremum jest, gdy f' zmienia w x_0 znak. $f' > 0$: funkcja rośnie, $f' < 0$: maleje

Własne wzory i notatki

2 Algebra liniowa

Typowy zakres algebry liniowej na I roku, liczby zespolone sprawdzone z notatkami z wykładu prof. Malinowskiego (20.10).

Oznaczenia

Liczby zespolone

i	jednostka urojona, $i^2 = -1$
$z = a + bi$	liczba zespolona w postaci algebraicznej
$\operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z$	część rzeczywista a, część urojona b
$\bar{z}$	sprzężenie: $a - bi$
$\lvert z\rvert$	moduł: odległość z od zera
φ	argument: kąt między osią Re a wektorem z
w_k	k-ty pierwiastek n-tego stopnia z z

Macierze i wyznaczniki

A, B, X	macierze (wielkie litery)
a_{ij}	element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie
$m \times n$	wymiar: m wierszy, n kolumn
I	macierz jednostkowa (jedynki na przekątnej)
A^T	macierz transponowana: wiersze zamienione na kolumny
A^{-1}	macierz odwrotna: $AA^{-1} = I$
$\det A,\ \lvert A\rvert$	wyznacznik macierzy kwadratowej
M_{ij}	macierz A bez i-tego wiersza i j-tej kolumny
$D_{ij},\ A^D$	dopełnienie algebraiczne, macierz dopełnień
$\operatorname{tr} A$	ślad: suma elementów na przekątnej
$\operatorname{rz} A$	rząd: liczba liniowo niezależnych wierszy

Układy równań

$AX = B$	układ: A macierz współczynników, X kolumna niewiadomych, B kolumna wyrazów wolnych
$[A \mid B]$	macierz rozszerzona: współczynniki z dopisaną kolumną wyrazów wolnych
A_i	macierz A z i-tą kolumną zamienioną na B (wzory Cramera)
$*$	w schemacie Gaussa: dowolna liczba

Wektory i przestrzeń

$\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$	wektor i jego współrzędne
$\lvert\vec{u}\rvert,\ \vec{u}_0$	długość wektora, wersor (wektor długości 1)
$\vec{0}$	wektor zerowy
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	wersory osi x, y, z
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	iloczyn skalarny, wynik to liczba
$\vec{u} \times \vec{v}$	iloczyn wektorowy, wynik to wektor prostopadły do obu
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$	iloczyn mieszany, wynik to liczba
$\vec{n}$	wektor normalny płaszczyzny (prostopadły do niej)
t	parametr w równaniu prostej, dowolna liczba rzeczywista
$\mathbb{R}^n$	przestrzeń wektorów o n współrzędnych
$\dim V$	wymiar przestrzeni: liczba wektorów bazy
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	baza kanoniczna

Wartości własne i przekształcenia

λ	wartość własna
$\vec{v}$	wektor własny: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
$P,\ D$	w diagonalizacji: macierz wektorów własnych, macierz diagonalna
$f(\vec{x})$	przekształcenie liniowe wektora $\vec{x}$
$g \circ f$	złożenie: najpierw f, potem g
$R_\varphi,\ S$	macierz obrotu o kąt φ, macierz skalowania

2.1 Liczby zespolone

Postać algebraiczna

$$z = a + bi, \quad i^2 = -1$$

$a = \operatorname{Re} z$ część rzeczywista, $b = \operatorname{Im} z$ część urojona

Sprzężenie i moduł

$$\bar{z} = a - bi \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

sprzężenie zmienia znak części urojonej; moduł to odległość z od zera na płaszczyźnie zespolonej

Dzielenie

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

licznik i mianownik mnożysz przez sprzężenie mianownika

Potęgi jednostki urojonej

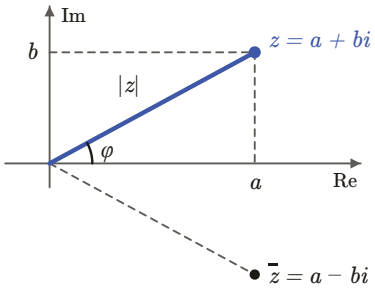
$$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

i^n zależy tylko od reszty z dzielenia n przez 4

Argument

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

dla $z \neq 0$; argument główny $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$



z jako punkt (a, b); sprzężenie to odbicie względem osi Re

Postać trygonometryczna

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$|z|$ moduł, φ argument; wygodna przy mnożeniu, potęgach i pierwiastkach

Postać wykładnicza

$$z = |z|\,e^{i\varphi}, \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

krótszy zapis postaci trygonometrycznej (wzór Eulera)

Mnożenie w postaci trygonometrycznej

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

moduły mnożysz, argumenty dodajesz; przy dzieleniu moduły dzielisz, argumenty odejmujesz

Wzór de Moivre'a

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

moduł podnosisz do potęgi n, argument mnożysz przez n

Pierwiastki n-tego stopnia

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big) \qquad k=0,1,\ldots,n-1$$

dla $z\neq 0$ jest ich dokładnie n; przy $n\geq 3$ leżą w wierzchołkach n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$

Wzory Eulera

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

np. $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}$

Wzory Cardano

$$z^3+pz+q=0$$

$$\Delta = q^2+\frac{4p^3}{27}, \quad \varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$u^3 = \frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}, \quad v^3 = \frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$3uv=-p, \quad z_1 = u+v$$

$$z_2 = \varepsilon u+\varepsilon^2 v, \quad z_3 = \varepsilon^2 u+\varepsilon v$$

p, q rzeczywiste: $\Delta>0$ jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa sprzężone, $\Delta<0$ trzy różne rzeczywiste, $\Delta=0$ trzy rzeczywiste, co najmniej dwa równe

2.2 Działania na macierzach

Macierz wymiaru m na n

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

m wierszy, n kolumn; a_{ij} stoi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie

Dodawanie i mnożenie przez liczbę

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad (kA)_{ij}=k\,a_{ij}$$

dodajesz tylko macierze tego samego wymiaru

Mnożenie macierzy

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

wiersz razy kolumna: $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$. Liczba kolumn A musi się równać liczbie wierszy B

Własności mnożenia

$$AB\neq BA \qquad (AB)C=A(BC)$$

$$A(B+C)=AB+AC$$

mnożenie nie jest przemienne: na ogół $AB\neq BA$, równość tylko w szczególnych przypadkach (np. $AI=IA$)

Macierz jednostkowa

$$AI=IA=A, \quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

jedynki na przekątnej głównej, reszta zera; w mnożeniu macierzy działa jak liczba 1

Transpozycja

$$(A^T)_{ij}=a_{ji} \qquad (A^T)^T=A \qquad (AB)^T=B^TA^T$$

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

wiersze stają się kolumnami

Ślad macierzy

$$\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

suma elementów na przekątnej głównej

2.3 Wyznaczniki

Wyznacznik 2 na 2

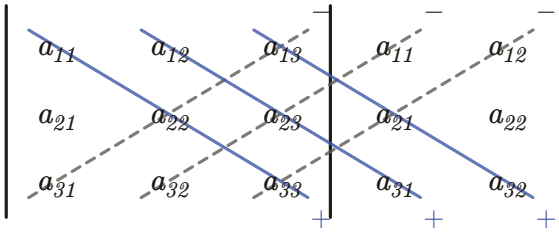
$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

Wyznacznik 3 na 3 (reguła Sarrusa)

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

dopisz z prawej dwie pierwsze kolumny: iloczyny na przekątnych w dół z plusem, w górę z minusem



ciągłe przekątne (w dół) z plusem, przerywane (w górę) z minusem

Rozwinięcie Laplace'a

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det M_{ij}$$

względem i-tego wiersza; M_{ij} to macierz bez i-tego wiersza i j-tej kolumny. Bierz wiersz albo kolumnę z największą liczbą zer

Dopełnienie algebraiczne

$$D_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$$

wyznacznik M_{ij} ze znakiem: plus, gdy $i+j$ parzyste (znaki układają się w szachownicę)

Własności

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B \qquad \det A^T=\det A$$

$$\det(kA)=k^n\det A$$

n stopień macierzy

Operacje na wierszach a wyznacznik

- zamiana dwóch wierszy zmienia znak wyznacznika
- pomnożenie wiersza przez k mnoży wyznacznik przez k
- dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza nie zmienia wyznacznika
- wiersz zerowy albo dwa proporcjonalne wiersze dają $\det A=0$
- macierz trójkątna: wyznacznik to iloczyn elementów na przekątnej
- to samo działa dla kolumn

2.4 Macierz odwrotna

Definicja i warunek istnienia

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I \qquad A^{-1}\text{ istnieje} \iff \det A\neq 0$$

tylko dla macierzy kwadratowej (nieosobliwej)

Odwrotna 2 na 2

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

zamień miejscami elementy na przekątnej, zmień znak pozostałych, podziel przez wyznacznik

Wzór z dopełnień algebraicznych

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(A^D\right)^T$$

$A^D=[D_{ij}]$ macierz dopełnień algebraicznych, po transpozycji to macierz dołączona

Metoda Gaussa

$$[\,A \mid I\,] \longrightarrow [\,I \mid A^{-1}\,]$$

operacjami na wierszach sprowadzasz lewą część do I, po prawej wychodzi A^{-1}

Własności

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

dla macierzy odwracalnych; odwrotność iloczynu bierzesz w odwrotnej kolejności

Równania macierzowe

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

strona mnożenia ma znaczenie, bo mnożenie macierzy nie jest przemienne

2.5 Układy równań liniowych

Zapis macierzowy

$$AX = B$$

A macierz współczynników, X kolumna niewiadomych, B kolumna wyrazów wolnych, $[A \mid B]$ macierz uzupełniona

Wzory Cramera

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

dla n równań z n niewiadomymi i $\det A \neq 0$. A_i to A z i-tą kolumną zamienioną na B

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

$$\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} [A \mid B]$$

- równe: układ ma rozwiązanie
- równe liczbie niewiadomych n: dokładnie jedno rozwiązanie
- równe $r < n$: nieskończenie wiele, zależnych od $n - r$ parametrów
- różne: układ sprzeczny

Układ jednorodny

$$AX = 0$$

zawsze ma rozwiązanie zerowe; niezerowe, gdy $\operatorname{rz} A < n$ (dla macierzy kwadratowej: $\det A = 0$)

Rząd macierzy

$$\operatorname{rz} A \leq \min(m, n)$$

- największy stopień niezerowego minora
- liczba niezerowych wierszy w postaci schodkowej
- operacje elementarne na wierszach i kolumnach nie zmieniają rzędu

Eliminacja Gaussa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

zapisz $[A \mid B]$, operacjami na wierszach zrób zera pod przekątną, potem rozwiązuj od ostatniego równania w górę

2.6 Wektory i iloczyny

Długość wektora i wersor

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

wersor ma długość 1 i ten sam kierunek

Iloczyn skalarny

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\varphi\end{aligned}$$

wynik to liczba

Kąt między wektorami

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

dla niezerowych wektorów; $\cos\varphi < 0$ znaczy, że kąt jest rozwarty

Prostopadłość i równoległość

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad \vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

dla wektorów niezerowych

Iloczyn wektorowy

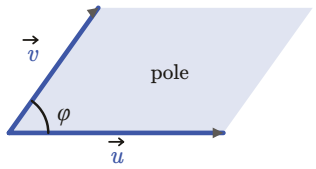
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

wynik to wektor prostopadły do $\vec{u}$ i $\vec{v}$; $\vec{v} \times \vec{u} = -\,\vec{u} \times \vec{v}$

Długość iloczynu wektorowego

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin\varphi$$

to pole równoległoboku rozpiętego na wektorach, trójkąta połowa



pole równoległoboku rozpiętego na $\vec{u}$ i $\vec{v}$ to $|\vec{u} \times \vec{v}|$

Iloczyn mieszany

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ to objętość równoległościanu, czworościanu $\frac{1}{6}$ tego. Zero: wektory leżą w jednej płaszczyźnie

Rzut wektora na wektor

$$\operatorname{rzut}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$$

część $\vec{u}$ leżąca wzdłuż $\vec{v}$, wynik jest równoległy do $\vec{v}$; dla $\vec{v} \neq \vec{0}$

2.7 Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Płaszczyzna: równanie ogólne

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\vec{n} = [A, B, C]$ wektor normalny, prostopadły do płaszczyzny

Płaszczyzna przez punkt

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(x_0, y_0, z_0) punkt płaszczyzny, $[A, B, C]$ wektor normalny

Prosta w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

(x_0, y_0, z_0) punkt prostej, $\vec{v} = [a, b, c]$ wektor kierunkowy

Prosta w postaci kierunkowej

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

dla $a, b, c \neq 0$; $[a, b, c]$ wektor kierunkowy

Odległość punktu od płaszczyzny

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

punkt (x_0, y_0, z_0) wstawiasz do równania płaszczyzny, moduł wyniku dzielisz przez długość wektora normalnego

Odległość punktu od prostej

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

P_0 dowolny punkt prostej, $\vec{v}$ jej wektor kierunkowy

Kąt między płaszczyznami

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

między prostymi tak samo, z wektorami kierunkowymi

2.8 Przestrzenie liniowe

Kombinacja liniowa

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ to dowolne liczby (współczynniki)

Liniowa niezależność

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0} \qquad \Rightarrow\ \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$$

wektory są liniowo niezależne, gdy wektor zerowy daje tylko kombinacja z samymi zerami

Baza i wymiar

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

- baza: wektory liniowo niezależne, które rozpinają całą przestrzeń
- wymiar: liczba wektorów w bazie
- n wektorów z $\mathbb{R}^n$ jest bazą, gdy wyznacznik z ich współrzędnych jest różny od 0

Baza kanoniczna

$$\vec{e}_1 = [1,0,0] \qquad \vec{e}_2 = [0,1,0] \qquad \vec{e}_3 = [0,0,1]$$

każdy wektor rozkłada się na nie wprost: $[x,y,z] = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

2.9 Wartości i wektory własne

Definicja

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

λ wartość własna, $\vec{v}$ wektor własny: macierz A tylko go wydłuża, skraca albo odwraca, kierunek zostaje

Równanie charakterystyczne

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

jego pierwiastki to wartości własne λ

Wektory własne

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

dla każdej λ osobno, bierzesz rozwiązania niezerowe

Sprawdzenie wyniku

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{tr} A \qquad \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A$$

wartości własne liczone z krotnościami, także zespolone

Diagonalizacja

$$A = PDP^{-1}$$

D diagonalna z wartościami własnymi, kolumny P to odpowiadające im wektory własne. Da się, gdy A ma n liniowo niezależnych wektorów własnych (np. n różnych wartości własnych)

2.10 Przekształcenia liniowe

Liniowość

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

dla każdych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ i liczb α, β; wynika z niej $f(\vec{0}) = \vec{0}$

Macierz przekształcenia

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

kolumny A to obrazy kolejnych wektorów bazy

Złożenie przekształceń

$$(g \circ f)(\vec{x}) = BA\vec{x}$$

najpierw f (macierz A), potem g (macierz B)

Obrót i skalowanie na płaszczyźnie

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

obrót o kąt φ przeciwnie do wskazówek zegara; tak obraca się obiekt w grze 2D

Własne wzory i notatki

3 Statystyka opisowa

Przepisane z pliku WZORY w Moodle (Statystyka opisowa), z tymi samymi oznaczeniami.

Oznaczenia

Dane i szeregi

n	liczebność: liczba wszystkich obserwacji
$x_1, \ldots, x_n$	szereg szczegółowy: kolejne obserwacje (do mediany i kwartyli ustawione rosnąco)
$x_i,\ f_i$	szereg punktowy: wariant i jego liczebność, $n = \sum f_i$
k	liczba wariantów albo przedziałów
x'_i	szereg przedziałowy: środek i-tego przedziału
h	rozpiętość przedziału
$x_{\min},\ x_{\max}$	najmniejsza i największa obserwacja

Przedział, w którym leży miara

$x_s,\ f_s$	dolna granica i liczebność przedziału mediany
$x_m,\ f_m$	to samo dla przedziału dominanty (największa liczebność)
$f_{m-1},\ f_{m+1}$	liczebności przedziałów przed i za przedziałem dominanty
$x_r,\ f_r$	przedział kwartyla pierwszego
$x_p,\ f_p$	przedział kwartyla trzeciego
$\sum_{i=1}^{s-1} f_i$	liczebność skumulowana: suma liczebności wszystkich przedziałów przed przedziałem mediany

Miary

$\bar{x}$	średnia arytmetyczna
M_e	mediana (wartość środkowa), to samo co Q_2
M_o	dominanta (moda): wartość najczęstsza
$Q_1,\ Q_3$	kwartyl pierwszy i trzeci
R	rozstęp
$s^2,\ s$	wariancja, odchylenie standardowe
d	odchylenie przeciętne
Q	odchylenie ćwiartkowe
V_s, V_d, V_Q	współczynniki zmienności
A_s	współczynnik asymetrii

Korelacja i regresja

$x,\ y$	dwie badane cechy; $\bar{y}$ średnia y
r_{xy}	współczynnik korelacji Pearsona
$r_s,\ d_i$	korelacja rang Spearmana, różnica rang
$c_{ix},\ c_{iy}$	rangi: miejsca i-tej obserwacji po ustawieniu wg x i wg y
$\hat{y}$	wartość y odczytana z prostej regresji (teoretyczna)
$a_1,\ a_0$	współczynnik kierunkowy i wyraz wolny prostej
$s_x,\ s_y$	odchylenia standardowe x i y
$y_i - \hat{y}_i$	reszta: różnica między wartością prawdziwą a z prostej
$\varphi^2,\ R^2$	współczynnik zbieżności, współczynnik determinacji
s_e	błąd standardowy reszt

Dynamika i trend

y_t	poziom zjawiska w okresie t; $t = 1, \ldots, n$
$\Delta_{t/1},\ \Delta_{t/t-1}$	przyrost absolutny do okresu bazowego, do poprzedniego
$d_{t/1},\ d_{t/t-1}$	przyrosty względne
$i_{t/1},\ i_{t/t-1}$	indeksy o stałej podstawie, łańcuchowe
$\bar{i}$	średnie tempo zmian
$p,\ q,\ w$	cena, ilość, wartość
$p_0,\ p_1$	indeks 0 to okres bazowy, 1 badany
$I^L,\ I^P$	indeks agregatowy Laspeyresa, Paaschego
$\bar{y}_t^{(3)}$	średnia ruchoma (tu 3-okresowa)
$S_t,\ \alpha$	wartość wygładzona, stała wygładzania
$\hat{y}_t$	wartość trendu w okresie t

3.1 Średnia, mediana, dominanta, kwartyle

Średnia arytmetyczna

szczegółowy

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

punktowy

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

przedziałowy

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x'_i$$

> suma wartości przez liczebność; w szeregach rozdzielczych każdy wariant (albo środek przedziału) mnożysz przez jego liczebność f_i

Mediana: szereg szczegółowy

$$M_e = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & n \text{ nieparzyste} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & n \text{ parzyste} \end{cases}$$

> dane ustawione rosnąco

Mediana: szereg przedziałowy

$$M_e = x_s + \frac{h}{f_s}\left(\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{s-1} f_i\right)$$

> połowa obserwacji leży poniżej. Najpierw znajdź przedział, w którym liczebność skumulowana przekracza $\frac{n}{2}$

Dominanta: szereg przedziałowy

$$M_o = x_m + \frac{(f_m - f_{m-1}) \cdot h}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})}$$

> najczęstsza wartość: liczysz w przedziale z największą liczebnością f_m, przy równych rozpiętościach przedziałów

Kwartyle

szczegółowy

$$Q_1 = x_{\frac{n+1}{4}} \qquad Q_3 = x_{\frac{3(n+1)}{4}}$$

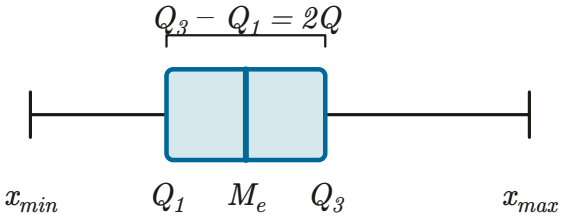
przedziałowy, kwartyl 1

$$Q_1 = x_r + \frac{h}{f_r}\left(\frac{n}{4} - \sum_{i=1}^{r-1} f_i\right)$$

przedziałowy, kwartyl 3

$$Q_3 = x_p + \frac{h}{f_p}\left(\frac{3}{4}n - \sum_{i=1}^{p-1} f_i\right)$$

poniżej Q_1 leży 25% obserwacji, poniżej Q_3 75%; mediana to kwartyl drugi. W przedziałowym liczysz jak medianę, tylko z $\frac{n}{4}$ i $\frac{3}{4}n$



wykres pudełkowy: w pudełku leży środkowe 50% danych, kreska w środku to mediana

3.2 Wariancja, odchylenia, zmienność

Rozstęp

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

największa obserwacja minus najmniejsza; mocno reaguje na wartości odstające

Odchylenie standardowe

$$s = \sqrt{s^2}$$

o ile średnio wartości odchylają się od średniej, w tych samych jednostkach co dane

Wariancja (dzielisz przez n)

szczegółowy

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

punktowy

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

przedziałowy

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i' - \bar{x})^2$$

licz po kolei: odchylenia od średniej, ich kwadraty (razy f_i), suma, dzielenie przez n

Wariancja z próby (dzielisz przez n - 1)

szczegółowy

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

punktowy

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_i$$

przedziałowy

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \bar{x})^2 f_i$$

wersja dla próby (nieobciążona); przy dużym n wynik prawie taki sam jak przy dzieleniu przez n

Wariancja z poprawką Shepparda

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \bar{x})^2 f_i - \frac{h^2}{12}$$

szereg przedziałowy

Odchylenie przeciętne

szczegółowy

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$$

punktowy

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}|x_i - \bar{x}| \cdot f_i$$

przedziałowy

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}|x_i' - \bar{x}| \cdot f_i$$

w ostatnim wierszu pliku z Moodle w punktowym i przedziałowym nad sumą stoi n, poprawnie k (liczba wariantów albo przedziałów)

Odchylenie ćwiartkowe

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

połowa odległości między kwartylami; opisuje środkowe 50% danych, więc wartości skrajne na nie nie wpływają

Współczynniki zmienności

z odchylenia standardowego

$$V_s = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

z odchylenia przeciętnego

$$V_d = \frac{d}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

pozycyjny

$$V_Q = \frac{Q}{M_e} \cdot 100\%$$

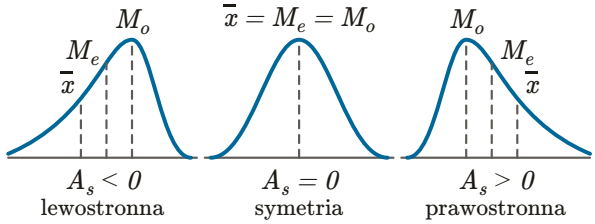
zmienność w procentach średniej (albo mediany); pozwala porównać cechy w różnych jednostkach, im większy, tym bardziej zróżnicowane dane

3.3 Asymetria

Współczynnik asymetrii

$$A_s = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$$

$A_s > 0$: asymetria prawostronna, $A_s < 0$: lewostronna



ogon rozkładu ciągnie średnią najdalej: przy prawostronnej $M_o < M_e < \bar{x}$

Rozkład symetryczny

$$\bar{x} = M_e = M_o$$

w rozkładzie symetrycznym z jedną dominantą

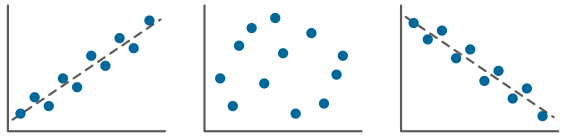
3.4 Korelacja i regresja

Wzory dotyczą prostej regresji $\hat{y} = a_1 x + a_0$. Dla regresji $\hat{x} = b_1 y + b_0$ zamieniasz we wzorach x z y.

Współczynnik korelacji Pearsona

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

od -1 do 1; im bliżej ± 1, tym silniejsza zależność liniowa



r_{xy} mierzy, jak blisko prostej leżą punkty; przerywana to prosta regresji

Prosta regresji

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}$$

metoda najmniejszych kwadratów; a_1 mówi, o ile średnio zmienia się y, gdy x rośnie o 1

Współczynnik kierunkowy z korelacji

$$a_1 = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$$

s_x, s_y odchylenia standardowe; a_1 ma zawsze ten sam znak co r_{xy}

Korelacja rang Spearmana

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}, \quad d_i = c_{ix} - c_{iy}$$

c_{ix}, c_{iy} to rangi, czyli numery miejsc obserwacji po ustawieniu

Dopasowanie modelu

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \qquad R^2 = 1 - \varphi^2$$

R^2 mówi, jaką część zmienności y wyjaśnia prosta

Błąd standardowy reszt

$$s_e^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad s_e = \sqrt{s_e^2}$$

k liczba szacowanych parametrów (dla prostej $k = 2$)

3.5 Dynamika zjawisk

Przyrosty absolutne

$$\Delta_{t/1} = y_t - y_1 \qquad \Delta_{t/t-1} = y_t - y_{t-1}$$

pierwszy o stałej podstawie, drugi łańcuchowy (do poprzedniego okresu)

Przyrosty względne

$$d_{t/1} = \frac{\Delta_{t/1}}{y_1} \qquad d_{t/t-1} = \frac{\Delta_{t/t-1}}{y_{t-1}}$$

przyrost absolutny podzielony przez poziom z okresu bazowego; razy 100% daje zmianę w procentach

Indeksy indywidualne

$$i_{t/1} = \frac{y_t}{y_1} \qquad i_{t/t-1} = \frac{y_t}{y_{t-1}}$$

pierwszy dla $t = 1, \ldots, n$, łańcuchowy dla $t = 2, \ldots, n$

Średnie tempo zmian

$$\bar{i} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

średnia geometryczna indeksów łańcuchowych; $(\bar{i} - 1) \cdot 100\%$ to średnia zmiana na okres

Indeksy cen, ilości i wartości

$$I_p = \frac{p_1}{p_0} \qquad I_q = \frac{q_1}{q_0} \qquad I_w = \frac{w_1}{w_0} = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_0}$$

p cena, q ilość, w wartość; 0 okres bazowy, 1 badany

Indeksy agregatowe

cen, Laspeyresa

$$I_p^L = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0}$$

cen, Paaschego

$$I_p^P = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$$

ilości, Laspeyresa

$$I_q^L = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

ilości, Paaschego

$$I_q^P = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$$

sumy po wszystkich wyrobach

3.6 Trend i wygładzanie

Średnia ruchoma 3-okresowa

$$\bar{y}_t^{(3)} = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

np. $\bar{y}_2^{(3)} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$; pierwszy i ostatni okres zostają bez średniej

Średnia ruchoma 5-okresowa

$$\bar{y}_t^{(5)} = \frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}}{5}$$

np. $\bar{y}_3^{(5)}$ to średnia z $y_1, \ldots, y_5$

Trend liniowy

$$\hat{y}_t = a_1 t + a_0 \qquad a_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(t - \bar{t})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(t - \bar{t})^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{t}$$

t numer okresu $(1, 2, \ldots, n)$, więc $\bar{t} = \frac{n+1}{2}$; to prosta regresji, w której zmienną objaśniającą jest czas

Wygładzanie wykładnicze

$$S_1 = y_1 \qquad S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1} \qquad \alpha \in \langle 0{,}1;\ 0{,}4\rangle$$

dla $t = 2, \ldots, n$. W pliku z Moodle przy y_t stoi a, chodzi o α

Własne wzory i notatki

4 Skróty Word i Excel

Word: skrypt „Edytor tekstowy" dr Stolińskiej z Moodle (Aneks A i B oraz rozdziały). Excel: standardowe skróty Excela dla Windows; materiały do arkusza jeszcze nie wyszły, dopasujemy je, gdy pojawią się w Moodle.

4.1 Word: diagnoza i podgląd

Dokument zachowuje się dziwnie? Najpierw włącz znaki niedrukowane, potem Odsłoń formatowanie.

Pokaż lub ukryj znaki niedrukowane (¶)

`Ctrl` `Shift` `8`

na klawiaturze to Ctrl+*; tryb diagnostyczny przy poprawianiu

Odsłoń formatowanie

`Shift` `F1`

pokazuje, czy formatowanie pochodzi ze stylu, czy jest ręczne

Okienko nawigacji z wyszukiwaniem

`Ctrl` `F`

mapa nagłówków; przeciąganiem przestawiasz rozdziały

Znajdź i zamień

`Ctrl` `H`

Więcej >> daje Specjalne i symbole wieloznaczne

Podgląd wydruku

`Ctrl` `P`

ujawnia samotne nagłówki, złe podziały i numerację stron

4.2 Word: znaki specjalne

° w opisach to twarda spacja. Kody Alt+0… wpisujesz na klawiaturze numerycznej z wciśniętym Alt.

Twarda spacja (nierozdzielająca)

`Ctrl` `Shift` `Spacja` lub `Alt` `0160`

w°Krakowie, dr°Nowak, 10°km, 2026°r., s.°15; zastępuje zwykłą spację

Łącznik nierozdzielający

`Alt` `Shift` `-`

numer telefonu, kod pocztowy 31-100, PN-EN; Ctrl+Shift+- w polskim Wordzie nic nie robi

Łącznik opcjonalny (¬)

`Ctrl` `Alt` `-`

miejsce, w którym Word może podzielić długi wyraz; samo Ctrl+- w nowym Wordzie pomniejsza widok

Półpauza (średnia kreska)

`Ctrl` `Num -` lub `Alt` `0150`

zakresy bez spacji: 2020 do 2026, s. 15 do 28; jako myślnik ze spacjami

Pauza (długa kreska)

`Ctrl` `Alt` `Num -` lub `Alt` `0151`

myślnik w składzie książkowym, dialogi

Wielokropek (jeden znak)

`Ctrl` `Alt` `.`

Autokorekta zamienia też trzy kropki

Polski cudzysłów otwierający i zamykający

`Alt` `0132` lub `Alt` `0148`

„tekst"; na stałe: Opcje autokorekty, cudzysłowy proste na drukarskie

Stopień i paragraf

`Alt` `0176` lub `Alt` `0167`

20 °C, kąt 90°, § 4

Ręczny podział wiersza (↵)

`Shift` `Enter`

prawie nigdy; wyjątki: adres, podpis, dwuwierszowy tytuł

Podział strony

`Ctrl` `Enter`

dla rozdziałów lepsza opcja akapitu „Podział strony przed" w stylu Nagłówek 1

4.3 Word: akapit

Ustawienia akapitu działają tam, gdzie stoi kursor, nie trzeba zaznaczać tekstu.

Wyrównaj do lewej

`Ctrl` `L`

Wyśrodkuj

`Ctrl` `E`

Wyrównaj do prawej

`Ctrl` `R`

Wyjustuj

`Ctrl` `J`

zwykle z dzieleniem wyrazów: Układ, Dzielenie wyrazów, Automatycznie

Interlinia pojedyncza

`Ctrl` `1`

Interlinia 1,5 wiersza

`Ctrl` `5`

Interlinia podwójna

`Ctrl` `2`

Zwiększ lub zmniejsz wcięcie z lewej

`Ctrl` `M` lub `Ctrl` `Shift` `M`

Wcięcie wysunięte i jego usunięcie

`Ctrl` `T` lub `Ctrl` `Shift` `T`

bibliografia, słowniczek

Okno Akapit

prawy przycisk myszy, Akapit… albo strzałka w rogu grupy Akapit; tu odstępy Przed i Po, wcięcie pierwszego wiersza, Tabulatory…

4.4 Word: formatowanie znaku

Pogrubienie, kursywa, podkreślenie

`Ctrl` `B` lub `Ctrl` `I` lub `Ctrl` `U`

podkreślenia unikaj: wygląda jak link

Okno Czcionka

`Ctrl` `D`

Kapitaliki

`Ctrl` `Shift` `K`

Wersaliki jako formatowanie

`Ctrl` `Shift` `A`

zamiast pisania z Caps Lock

Zmiana wielkości liter

`Shift` `F3`

kolejne naciśnięcia przełączają warianty

Kopiuj i wklej formatowanie (Malarz formatów)

`Ctrl` `Alt` `C` lub `Ctrl` `Alt` `V`

dawniej Ctrl+Shift+C i V; dziś Ctrl+Shift+V wkleja sam tekst

4.5 Word: style i czyszczenie

Wygląd ustawiasz w stylu, nie w każdym akapicie osobno.

Nagłówek 1, 2, 3

`Ctrl` `Alt` `1` lub `Ctrl` `Alt` `2` lub `Ctrl` `Alt` `3`

Styl Normalny

`Ctrl` `Shift` `N`

Usuń ręczne formatowanie znaków

`Ctrl` `Spacja`

przywraca to, co wynika ze stylu

Usuń ręczne formatowanie akapitu

`Ctrl` `Q`

wcięcia, odstępy i wyrównanie spoza stylu

Wklej tylko tekst

`Ctrl` `Shift` `V`

Microsoft 365; inaczej Wklej, Zachowaj tylko tekst

Wyczyść całe formatowanie

galeria stylów, Wyczyść formatowanie; akapit wraca do stylu Normalny

4.6 Word: odwołania, pola, kontrola

Wstaw przypis dolny

`Ctrl` `Alt` `J`

polski Word; Ctrl+Alt+F działa tylko w angielskim. Nigdy ręczna cyfra w indeksie górnym

Aktualizuj wszystkie pola

`F9`

najpierw Ctrl+A (cały dokument), potem F9: spis treści, podpisy, odsyłacze, numery stron

Hiperłącze

`Ctrl` `Alt` `H`

polski Word; Ctrl+K to tu Autoformatowanie

Pisownia i gramatyka

`F7`

sprawdź język tekstu: Recenzja, Język, Ustaw język sprawdzania

Zapisz jako (też PDF i szablon .dotx)

`F12`

PDF: Opcje, zakładki z nagłówków

Cofnij i ponów

`Ctrl` `Z` lub `Ctrl` `Y`

Ctrl+Z cofa też automatyczną listę, którą Word sam zrobił

4.7 Word: kody w Znajdź i zamień

Kody wpisujesz w polach Znajdź i Zamień na (Ctrl+H), bez symboli wieloznacznych. Masowe zamiany rób na kopii pliku.

Znak akapitu ¶

`^p`

Tabulator

`^t`

Ręczny podział wiersza

`^l`

Ręczny podział strony

`^m`

Podział sekcji

`^b`

nie usuwaj w ciemno: trzyma ustawienia następnej sekcji

Twarda spacja

`^s`

Łącznik nierozdzielający i opcjonalny

`^~` lub `^-`

Półpauza i pauza

`^=` lub `^+`

Dowolny biały znak

`^w`

Dowolna cyfra i dowolna litera

`^#` lub `^$`

Gotowe zamiany

- puste akapity: ^p^p na ^p, powtarzaj do zera zamian
- podwójne spacje: dwie spacje na jedną, powtarzaj do zera
- spacja przed przecinkiem: ^w, na sam przecinek (kropka: ^w. na .)
- Shift+Enter w tekście: ^l na spację
- myślnik z dywizu: ^w-^w na ^= (półpauza)
- tabulator na początku akapitu: ^p^t na ^p, potem wcięcie w stylu
- sierotki (symbole wieloznaczne): (<[aiouwzAIOUWZ]) ze spacją na \1^s
- wiele spacji naraz (symbole wieloznaczne): ( ){2,} na \1

4.8 Excel: ruch i zaznaczanie

Skok do krawędzi danych

`Ctrl` `Strzałka`

Zaznacz do krawędzi danych

`Ctrl` `Shift` `Strzałka`

Cała kolumna lub cały wiersz

`Ctrl` `Spacja` lub `Shift` `Spacja`

Zaznacz obszar danych

`Ctrl` `A`

drugie naciśnięcie zaznacza cały arkusz

Początek arkusza (A1)

`Ctrl` `Home`

Następny lub poprzedni arkusz

`Ctrl` `PageDown` lub `Ctrl` `PageUp`

4.9 Excel: wpisywanie i formuły

Edytuj komórkę

`F2`

Adres bezwzględny A1

`F4`

kursor na adresie w formule; kolejne naciśnięcia blokują: kolumnę i wiersz, sam wiersz, samą kolumnę, nic

Autosumowanie

`Alt` `=`

Nowy wiersz w tej samej komórce

`Alt` `Enter`

Wpisz to samo w całe zaznaczenie

`Ctrl` `Enter`

Wypełnij w dół lub w prawo

`Ctrl` `D` lub `Ctrl` `R`

Wypełnianie błyskawiczne

`Ctrl` `E`

Excel zgaduje wzór z przykładu, np. imię z „Imię Nazwisko”

Dzisiejsza data i godzina (stałe)

`Ctrl` `;` lub `Ctrl` `Shift` `;`

> wpisuje wartość na sztywno; ciągle aktualne: =DZIŚ() i =TERAZ()

Pokaż formuły zamiast wyników

`Ctrl` `` ` ``

Przelicz skoroszyt

`F9`

4.10 Excel: format, tabele, wykresy, makra

Formatuj komórki

`Ctrl` `1`

Wklej specjalnie

`Ctrl` `Alt` `V`

> same wartości, formaty, transpozycja

Wstaw lub usuń komórki

`Ctrl` `Shift` `=` lub `Ctrl` `-`

Formatuj jako tabelę

`Ctrl` `T`

Włącz lub wyłącz filtr

`Ctrl` `Shift` `L`

Wykres w arkuszu lub na osobnym arkuszu

`Alt` `F1` lub `F11`

Lista makr

`Alt` `F8`

Edytor VBA

`Alt` `F11`

Własne wzory i notatki