Karta wzorów: algebra

Podręcznik Ideis, 1 rok informatyki stosowanej. Karta od 6 października 2026, ostatnia aktualizacja 24 października 2026, 11:20. Najnowsza wersja: plan-ideis.vercel.app/wzory

2 Algebra liniowa

Typowy zakres algebry liniowej na I roku, liczby zespolone sprawdzone z notatkami z wykładu prof. Malinowskiego (20.10).

Oznaczenia

Liczby zespolone

i	jednostka urojona, $i^2 = -1$
$z = a + bi$	liczba zespolona w postaci algebraicznej
$\operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z$	część rzeczywista a, część urojona b
$\bar{z}$	sprzężenie: $a - bi$
$\lvert z\rvert$	moduł: odległość z od zera
φ	argument: kąt między osią Re a wektorem z
w_k	k-ty pierwiastek n-tego stopnia z z

Macierze i wyznaczniki

A, B, X	macierze (wielkie litery)
a_{ij}	element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie
$m \times n$	wymiar: m wierszy, n kolumn
I	macierz jednostkowa (jedynki na przekątnej)
A^T	macierz transponowana: wiersze zamienione na kolumny
A^{-1}	macierz odwrotna: $AA^{-1} = I$
$\det A,\ \lvert A\rvert$	wyznacznik macierzy kwadratowej
M_{ij}	macierz A bez i-tego wiersza i j-tej kolumny
$D_{ij},\ A^D$	dopełnienie algebraiczne, macierz dopełnień
$\operatorname{tr} A$	ślad: suma elementów na przekątnej
$\operatorname{rz} A$	rząd: liczba liniowo niezależnych wierszy

Układy równań

$AX = B$	układ: A macierz współczynników, X kolumna niewiadomych, B kolumna wyrazów wolnych
$[A \mid B]$	macierz rozszerzona: współczynniki z dopisaną kolumną wyrazów wolnych
A_i	macierz A z i-tą kolumną zamienioną na B (wzory Cramera)
$*$	w schemacie Gaussa: dowolna liczba

Wektory i przestrzeń

$\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$	wektor i jego współrzędne
$\lvert\vec{u}\rvert,\ \vec{u}_0$	długość wektora, wersor (wektor długości 1)
$\vec{0}$	wektor zerowy
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	wersory osi x, y, z
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	iloczyn skalarny, wynik to liczba
$\vec{u} \times \vec{v}$	iloczyn wektorowy, wynik to wektor prostopadły do obu
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$	iloczyn mieszany, wynik to liczba
$\vec{n}$	wektor normalny płaszczyzny (prostopadły do niej)
t	parametr w równaniu prostej, dowolna liczba rzeczywista
$\mathbb{R}^n$	przestrzeń wektorów o n współrzędnych
$\dim V$	wymiar przestrzeni: liczba wektorów bazy
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	baza kanoniczna

Wartości własne i przekształcenia

λ	wartość własna
$\vec{v}$	wektor własny: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
$P,\ D$	w diagonalizacji: macierz wektorów własnych, macierz diagonalna
$f(\vec{x})$	przekształcenie liniowe wektora $\vec{x}$
$g \circ f$	złożenie: najpierw f, potem g
$R_\varphi,\ S$	macierz obrotu o kąt φ, macierz skalowania

2.1 Liczby zespolone

Postać algebraiczna

$$z = a + bi, \quad i^2 = -1$$

$a = \operatorname{Re} z$ część rzeczywista, $b = \operatorname{Im} z$ część urojona

Sprzężenie i moduł

$$\bar{z} = a - bi \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

sprzężenie zmienia znak części urojonej; moduł to odległość z od zera na płaszczyźnie zespolonej

Dzielenie

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

licznik i mianownik mnożysz przez sprzężenie mianownika

Potęgi jednostki urojonej

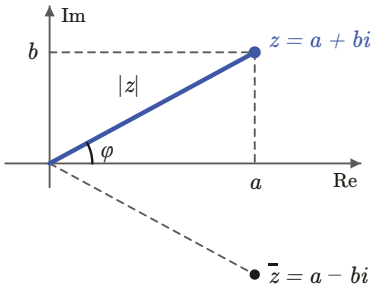
$$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

i^n zależy tylko od reszty z dzielenia n przez 4

Argument

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

dla $z \neq 0$; argument główny $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$



z jako punkt (a, b); sprzężenie to odbicie względem osi Re

Postać trygonometryczna

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$|z|$ moduł, φ argument; wygodna przy mnożeniu, potęgach i pierwiastkach

Postać wykładnicza

$$z = |z|\,e^{i\varphi}, \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

krótszy zapis postaci trygonometrycznej (wzór Eulera)

Mnożenie w postaci trygonometrycznej

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

moduły mnożysz, argumenty dodajesz; przy dzieleniu moduły dzielisz, argumenty odejmujesz

Wzór de Moivre'a

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

moduł podnosisz do potęgi n, argument mnożysz przez n

Pierwiastki n-tego stopnia

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big) \qquad k=0,1,\ldots,n-1$$

dla $z\neq 0$ jest ich dokładnie n; przy $n\geq 3$ leżą w wierzchołkach n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$

Wzory Eulera

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

np. $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}$

Wzory Cardano

$$z^3+pz+q=0$$

$$\Delta = q^2+\frac{4p^3}{27}, \quad \varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$u^3 = \frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}, \quad v^3 = \frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$3uv=-p, \quad z_1 = u+v$$

$$z_2 = \varepsilon u+\varepsilon^2 v, \quad z_3 = \varepsilon^2 u+\varepsilon v$$

p, q rzeczywiste: $\Delta>0$ jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa sprzężone, $\Delta<0$ trzy różne rzeczywiste, $\Delta=0$ trzy rzeczywiste, co najmniej dwa równe

2.2 Działania na macierzach

Macierz wymiaru m na n

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

m wierszy, n kolumn; a_{ij} stoi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie

Dodawanie i mnożenie przez liczbę

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad (kA)_{ij}=k\,a_{ij}$$

dodajesz tylko macierze tego samego wymiaru

Mnożenie macierzy

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

wiersz razy kolumna: $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$. Liczba kolumn A musi się równać liczbie wierszy B

Własności mnożenia

$$AB\neq BA \qquad (AB)C=A(BC)$$

$$A(B+C)=AB+AC$$

mnożenie nie jest przemienne: na ogół $AB\neq BA$, równość tylko w szczególnych przypadkach (np. $AI=IA$)

Macierz jednostkowa

$$AI=IA=A, \quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

jedynki na przekątnej głównej, reszta zera; w mnożeniu macierzy działa jak liczba 1

Transpozycja

$$(A^T)_{ij}=a_{ji} \qquad (A^T)^T=A \qquad (AB)^T=B^TA^T$$

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

wiersze stają się kolumnami

Ślad macierzy

$$\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

suma elementów na przekątnej głównej

2.3 Wyznaczniki

Wyznacznik 2 na 2

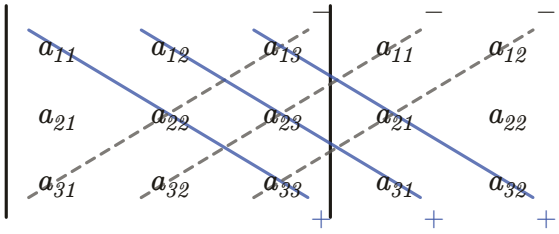
$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

iloczyn na przekątnej głównej minus iloczyn na drugiej przekątnej

Wyznacznik 3 na 3 (reguła Sarrusa)

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

dopisz z prawej dwie pierwsze kolumny: iloczyny na przekątnych w dół z plusem, w górę z minusem



ciągłe przekątne (w dół) z plusem, przerywane (w górę) z minusem

Rozwinięcie Laplace'a

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det M_{ij}$$

względem i-tego wiersza; M_{ij} to macierz bez i-tego wiersza i j-tej kolumny. Bierz wiersz albo kolumnę z największą liczbą zer

Dopełnienie algebraiczne

$$D_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$$

wyznacznik M_{ij} ze znakiem: plus, gdy $i+j$ parzyste (znaki układają się w szachownicę)

Własności

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B \qquad \det A^T=\det A$$

$$\det(kA)=k^n\det A$$

n stopień macierzy

Operacje na wierszach a wyznacznik

- zamiana dwóch wierszy zmienia znak wyznacznika
- pomnożenie wiersza przez k mnoży wyznacznik przez k
- dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza nie zmienia wyznacznika
- wiersz zerowy albo dwa proporcjonalne wiersze dają $\det A=0$
- macierz trójkątna: wyznacznik to iloczyn elementów na przekątnej
- to samo działa dla kolumn

2.4 Macierz odwrotna

Definicja i warunek istnienia

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I \qquad A^{-1}\text{ istnieje} \iff \det A\neq 0$$

tylko dla macierzy kwadratowej (nieosobliwej)

Odwrotna 2 na 2

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

zamień miejscami elementy na przekątnej, zmień znak pozostałych, podziel przez wyznacznik

Wzór z dopełnień algebraicznych

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(A^D\right)^T$$

$A^D=[D_{ij}]$ macierz dopełnień algebraicznych, po transpozycji to macierz dołączona

Metoda Gaussa

$$[\,A \mid I\,] \longrightarrow [\,I \mid A^{-1}\,]$$

operacjami na wierszach sprowadzasz lewą część do I, po prawej wychodzi A^{-1}

Własności

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

dla macierzy odwracalnych; odwrotność iloczynu bierzesz w odwrotnej kolejności

Równania macierzowe

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

strona mnożenia ma znaczenie, bo mnożenie macierzy nie jest przemienne

2.5 Układy równań liniowych

Zapis macierzowy

$$AX = B$$

A macierz współczynników, X kolumna niewiadomych, B kolumna wyrazów wolnych, $[A \mid B]$ macierz uzupełniona

Wzory Cramera

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

dla n równań z n niewiadomymi i $\det A \neq 0$. A_i to A z i-tą kolumną zamienioną na B

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

$$\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} [A \mid B]$$

- równe: układ ma rozwiązanie
- równe liczbie niewiadomych n: dokładnie jedno rozwiązanie
- równe $r < n$: nieskończenie wiele, zależnych od $n - r$ parametrów
- różne: układ sprzeczny

Układ jednorodny

$$AX = 0$$

zawsze ma rozwiązanie zerowe; niezerowe, gdy $\operatorname{rz} A < n$ (dla macierzy kwadratowej: $\det A = 0$)

Rząd macierzy

$$\operatorname{rz} A \leq \min(m, n)$$

- największy stopień niezerowego minora
- liczba niezerowych wierszy w postaci schodkowej
- operacje elementarne na wierszach i kolumnach nie zmieniają rzędu

Eliminacja Gaussa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

zapisz $[A \mid B]$, operacjami na wierszach zrób zera pod przekątną, potem rozwiązuj od ostatniego równania w górę

2.6 Wektory i iloczyny

Długość wektora i wersor

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

wersor ma długość 1 i ten sam kierunek

Iloczyn skalarny

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\varphi\end{aligned}$$

wynik to liczba

Kąt między wektorami

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

dla niezerowych wektorów; $\cos\varphi < 0$ znaczy, że kąt jest rozwarty

Prostopadłość i równoległość

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad \vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

dla wektorów niezerowych

Iloczyn wektorowy

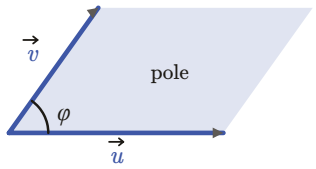
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

wynik to wektor prostopadły do $\vec{u}$ i $\vec{v}$; $\vec{v} \times \vec{u} = -\,\vec{u} \times \vec{v}$

Długość iloczynu wektorowego

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin\varphi$$

to pole równoległoboku rozpiętego na wektorach, trójkąta połowa



pole równoległoboku rozpiętego na $\vec{u}$ i $\vec{v}$ to $|\vec{u} \times \vec{v}|$

Iloczyn mieszany

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ to objętość równoległościanu, czworościanu $\frac{1}{6}$ tego. Zero: wektory leżą w jednej płaszczyźnie

Rzut wektora na wektor

$$\operatorname{rzut}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$$

część $\vec{u}$ leżąca wzdłuż $\vec{v}$, wynik jest równoległy do $\vec{v}$; dla $\vec{v} \neq \vec{0}$

2.7 Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Płaszczyzna: równanie ogólne

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\vec{n} = [A, B, C]$ wektor normalny, prostopadły do płaszczyzny

Płaszczyzna przez punkt

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(x_0, y_0, z_0) punkt płaszczyzny, $[A, B, C]$ wektor normalny

Prosta w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

(x_0, y_0, z_0) punkt prostej, $\vec{v} = [a, b, c]$ wektor kierunkowy

Prosta w postaci kierunkowej

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

dla $a, b, c \neq 0$; $[a, b, c]$ wektor kierunkowy

Odległość punktu od płaszczyzny

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

punkt (x_0, y_0, z_0) wstawiasz do równania płaszczyzny, moduł wyniku dzielisz przez długość wektora normalnego

Odległość punktu od prostej

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

P_0 dowolny punkt prostej, $\vec{v}$ jej wektor kierunkowy

Kąt między płaszczyznami

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

między prostymi tak samo, z wektorami kierunkowymi

2.8 Przestrzenie liniowe

Kombinacja liniowa

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ to dowolne liczby (współczynniki)

Liniowa niezależność

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0} \qquad \Rightarrow\ \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$$

wektory są liniowo niezależne, gdy wektor zerowy daje tylko kombinacja z samymi zerami

Baza i wymiar

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

- baza: wektory liniowo niezależne, które rozpinają całą przestrzeń
- wymiar: liczba wektorów w bazie
- n wektorów z $\mathbb{R}^n$ jest bazą, gdy wyznacznik z ich współrzędnych jest różny od 0

Baza kanoniczna

$$\vec{e}_1 = [1,0,0] \qquad \vec{e}_2 = [0,1,0] \qquad \vec{e}_3 = [0,0,1]$$

każdy wektor rozkłada się na nie wprost: $[x,y,z] = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

2.9 Wartości i wektory własne

Definicja

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

λ wartość własna, $\vec{v}$ wektor własny: macierz A tylko go wydłuża, skraca albo odwraca, kierunek zostaje

Równanie charakterystyczne

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

jego pierwiastki to wartości własne λ

Wektory własne

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

dla każdej λ osobno, bierzesz rozwiązania niezerowe

Sprawdzenie wyniku

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{tr} A \qquad \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A$$

wartości własne liczone z krotnościami, także zespolone

Diagonalizacja

$$A = PDP^{-1}$$

D diagonalna z wartościami własnymi, kolumny P to odpowiadające im wektory własne. Da się, gdy A ma n liniowo niezależnych wektorów własnych (np. n różnych wartości własnych)

2.10 Przekształcenia liniowe

Liniowość

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

dla każdych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ i liczb α, β; wynika z niej $f(\vec{0}) = \vec{0}$

Macierz przekształcenia

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

kolumny A to obrazy kolejnych wektorów bazy

Złożenie przekształceń

$$(g \circ f)(\vec{x}) = BA\vec{x}$$

najpierw f (macierz A), potem g (macierz B)

Obrót i skalowanie na płaszczyźnie

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

obrót o kąt φ przeciwnie do wskazówek zegara; tak obraca się obiekt w grze 2D

Własne wzory i notatki